

Analisis Pengaruh Ukuran Langkah Terhadap Akurasi Metode Shooting Dan Beda Hingga Pusat Pada Masalah Kondisi Batas Linear

Sri Puji Lestari^{1*}, Aldila Puspitaningrum²

¹ Teknik Elektro, Universitas Islam Balitar Blitar

² Teknik Elektro, Universitas Islam Balitar Blitar

^{1*} sripujilestari623@gmail.com, ² aldila.puspitaningrum@gmail.com

Abstrak

Masalah kondisi batas (*boundary value problem*) pada persamaan diferensial linear orde dua banyak dijumpai dalam berbagai permasalahan sains dan rekayasa. Pada beberapa kasus, solusi analitik sulit diperoleh sehingga diperlukan metode numerik yang mampu menghasilkan solusi dengan tingkat akurasi yang baik. Penelitian ini bertujuan membandingkan kinerja metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat dalam menyelesaikan masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua. Kedua metode diterapkan pada permasalahan yang memiliki solusi eksak sehingga tingkat akurasinya dapat dievaluasi menggunakan galat absolut. Pengujian dilakukan dengan tiga variasi ukuran langkah untuk menganalisis pengaruh ukuran langkah terhadap hasil pendekatan numerik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua metode mampu menghasilkan solusi yang mendekati solusi eksak, namun tingkat akurasi meningkat seiring dengan semakin kecilnya ukuran langkah yang digunakan. Perbandingan galat absolut menunjukkan adanya perbedaan tingkat akurasi antara metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat pada setiap ukuran langkah. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi dalam pemilihan metode numerik yang sesuai untuk penyelesaian masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua.

Kata Kunci: *Boundary Value Problem*, *Shooting*, Beda Hingga

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial merupakan salah satu model matematika yang banyak digunakan untuk merepresentasikan berbagai fenomena pada bidang sains, teknik, fisika, biologi, ekonomi, dan rekayasa. Salah satu bentuk permasalahan yang sering dijumpai adalah *boundary value problem* (BVP), yaitu persamaan diferensial yang dilengkapi dengan kondisi batas pada dua titik yang berbeda. Permasalahan ini banyak diterapkan pada analisis perpindahan panas, getaran mekanik, elastisitas, mekanika fluida, distribusi potensial listrik, serta berbagai fenomena rekayasa lainnya. Pada beberapa kasus sederhana, solusi analitik masih dapat diperoleh. Namun, untuk model yang lebih kompleks, solusi eksak sering kali sulit bahkan tidak tersedia sehingga diperlukan metode numerik yang mampu menghasilkan solusi hampiran dengan tingkat akurasi yang tinggi. Oleh karena itu, pemilihan metode numerik yang tepat menjadi salah satu aspek penting dalam penyelesaian *boundary value problem* (Burden & Faires, 2010; Suryanto, Musafir, dkk., 2025).

Berbagai metode numerik telah dikembangkan untuk menyelesaikan *boundary value problem*, di antaranya metode *Shooting*, metode Beda Hingga (*Finite Difference Method*), metode Kolokasi (*Collocation Method*), metode Elemen Hingga (*Finite Element Method*), serta berbagai pengembangannya. Di antara metode-metode tersebut, metode *Shooting* dan metode Beda Hingga merupakan dua pendekatan yang banyak digunakan karena memiliki konsep yang relatif sederhana, mudah diimplementasikan, dan mampu menghasilkan solusi numerik dengan tingkat akurasi yang baik. Metode *Shooting* menyelesaikan *boundary value problem* dengan mengubahnya menjadi *initial value problem*, kemudian menentukan nilai awal yang belum diketahui melalui proses iteratif hingga kondisi batas terpenuhi (Edun & Akinlabi, 2021). Sementara itu, metode Beda Hingga menyelesaikan permasalahan dengan mendiskretisasi turunan pada persamaan diferensial sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar yang dapat diselesaikan secara numerik (Suryanto, Musafir, dkk., 2025). Oleh karena itu, penelitian ini membahas analisis perbandingan kedua metode tersebut sebagai alternatif dalam menentukan metode yang lebih sesuai untuk menyelesaikan masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua.

Penelitian mengenai metode *Shooting* terus berkembang dalam beberapa tahun terakhir. Jumri dan Md. Shab (2001) mengembangkan metode *Nonlinear Shooting* untuk menyelesaikan masalah kondisi batas dua titik pada persamaan diferensial nonlinear. Selanjutnya, Edun dan Akinlabi (2021) menerapkan metode *Shooting* yang dipadukan dengan metode Euler dan metode Secant untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde dua, serta menunjukkan bahwa metode tersebut mampu memberikan solusi yang akurat. Bakodah dkk. (2024) kemudian mengembangkan *Efficient Decomposition Shooting Method* yang mampu menyelesaikan masalah kondisi batas dua titik. Hasil penelitian-penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode *Shooting* masih menjadi salah satu metode yang banyak dikembangkan untuk meningkatkan akurasi maupun menyelesaikan masalah kondisi batas secara efisien.

Metode Beda Hingga juga mengalami perkembangan yang signifikan. Dung dan Quang (2024) mengembangkan skema beda hingga berorde tinggi untuk menyelesaikan masalah nilai batas orde kedua dengan kondisi batas Dirichlet dan campuran. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa peningkatan orde aproksimasi mampu menghasilkan solusi yang lebih akurat

dibandingkan aproksimasi standar. Selanjutnya, Ben-Romdhane dan Temimi (2025) memperkenalkan *Iterative Finite Difference Method* yang memiliki konvergensi cepat, akurasi tinggi, dan biaya komputasi yang relatif rendah pada penyelesaian persamaan Gordon nonlinear. Penelitian lain oleh Almutairi dan Saeed (2025) membandingkan metode Beda Hingga dengan metode Galerkin *Finite Element* dan menyimpulkan bahwa metode Beda Hingga tetap menjadi metode yang kompetitif karena implementasinya sederhana serta mampu memberikan hasil yang baik pada berbagai jenis *boundary value problem*.

Penelitian yang membandingkan beberapa metode numerik juga semakin banyak dilakukan. Ardiana dkk. (2025) membandingkan metode *Shooting* dan metode Beda Hingga untuk menyelesaikan masalah kondisi batas linear dengan kondisi batas Dirichlet, Neumann, dan Robin. Hasil penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode *Shooting* menghasilkan tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan metode Beda Hingga. Selanjutnya, Kamelia dkk. (2025) memperluas kajian tersebut dengan membandingkan metode *Finite Difference*, *Shooting*, dan *Collocation* pada masalah nilai batas linear non-stiff, stiff, dan nonlinear. Penelitian tersebut menunjukkan bahwa metode *Shooting* memiliki tingkat akurasi yang sangat baik pada sebagian besar kasus, sedangkan metode Beda Hingga memberikan waktu komputasi yang lebih baik pada beberapa permasalahan.

Selain pemilihan metode, ukuran langkah juga menjadi salah satu faktor yang memengaruhi kualitas solusi numerik. Pada beberapa penelitian, ukuran langkah tidak hanya memengaruhi besarnya galat aproksimasi, tetapi juga dapat memengaruhi karakteristik solusi numerik yang dihasilkan. Suryanto, Krisnawati, dkk. (2025) menunjukkan bahwa ukuran langkah pada proses diskretisasi dapat memengaruhi perilaku dinamik model diskret, termasuk kestabilan dan bifurkasi. Hasil yang serupa juga ditunjukkan oleh Lestari dkk. (2025), yang menyatakan bahwa perubahan ukuran langkah integrasi memengaruhi kestabilan dan munculnya bifurkasi pada model predator-prey fraksional diskret. Temuan tersebut menunjukkan bahwa ukuran langkah merupakan parameter penting yang perlu diperhatikan dalam metode numerik.

Berbagai penelitian terdahulu menunjukkan bahwa metode *Shooting* dan metode Beda Hingga merupakan dua metode numerik yang memiliki kinerja baik dalam menyelesaikan *boundary value problem*. Penelitian ini melengkapi kajian-kajian tersebut dengan mengevaluasi kedua metode pada persamaan diferensial linear orde dua menggunakan tiga variasi ukuran langkah. Perbandingan dilakukan berdasarkan solusi numerik dan nilai galat absolut terhadap solusi eksak sehingga dapat diketahui pengaruh ukuran langkah terhadap tingkat akurasi masing-masing metode. Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi dalam pemilihan metode numerik yang sesuai untuk menyelesaikan masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua serta menjadi bahan pengembangan penelitian selanjutnya pada permasalahan yang lebih kompleks. Artikel ini disusun dalam empat bagian. Bagian kedua menyajikan metodologi penelitian yang meliputi model persamaan diferensial yang digunakan, penerapan metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat, serta tahapan penyelesaian numerik. Bagian ketiga menyajikan hasil simulasi numerik dan pembahasan mengenai perbandingan akurasi kedua metode berdasarkan variasi ukuran langkah. Bagian terakhir memuat kesimpulan penelitian serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

METODE PENELITIAN

Artikel ini bertujuan membandingkan metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat dalam menyelesaikan masalah kondisi batas pada persamaan diferensial linear orde dua. Perbandingan dilakukan berdasarkan tingkat akurasi solusi numerik terhadap solusi eksak menggunakan tiga variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Persamaan diferensial yang digunakan dalam penelitian ini diberikan pada Persamaan (1), sedangkan kondisi batasnya diberikan pada Persamaan (2).

$$y''(x) + y(x) = 0, 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

$$y(0) = 0, y(1) = 1. \quad (2)$$

Solusi eksak dari Persamaan (1) digunakan sebagai acuan dalam mengevaluasi hasil penyelesaian numerik menggunakan kedua metode.

Metode Shooting

Pada metode *Shooting*, Persamaan (1) terlebih dahulu diubah menjadi sistem persamaan diferensial orde satu. Untuk itu, didefinisikan variabel baru sebagaimana ditunjukkan pada Persamaan (3) dan Persamaan (4),

$$y_1 = y, \quad (3)$$

$$y_2 = y'. \quad (4)$$

Berdasarkan substitusi pada Persamaan (3) dan Persamaan (4), Persamaan (1) dapat dituliskan menjadi sistem persamaan diferensial orde satu yang diberikan pada Persamaan (5) dan Persamaan (6),

$$y_1' = y_2, \quad (5)$$

$$y_2' = -y_1. \quad (6)$$

Nilai awal $y_1(0)$ diperoleh dari kondisi batas pertama pada Persamaan (2), sedangkan nilai awal $y_2(0)$ belum diketahui sehingga ditentukan melalui proses iterasi menggunakan metode Secant. Pada setiap iterasi, sistem Persamaan (5) dan Persamaan (6) diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat hingga memenuhi kondisi batas kedua pada Persamaan (2) (Suryanto, Musafir, dkk., 2025).

Metode Beda Hingga Pusat

Pada metode Beda Hingga Pusat, interval penyelesaian pada Persamaan (1) dibagi menjadi sejumlah titik diskret dengan ukuran langkah h . Turunan kedua pada Persamaan (1) didekati menggunakan skema beda hingga pusat yang diberikan pada Persamaan (7),

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \quad (7)$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (7) ke dalam Persamaan (1), diperoleh bentuk diskret sebagai berikut,

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + y_i = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) kemudian disusun menjadi sistem persamaan linear berbentuk matriks sebagaimana dinyatakan pada Persamaan (9),

$$Ay = \mathbf{b}. \quad (9)$$

Sistem persamaan pada Persamaan (9) selanjutnya diselesaikan menggunakan eliminasi Gauss untuk memperoleh solusi numerik pada setiap titik diskret.

Hasil penyelesaian menggunakan metode Shooting dan metode Beda Hingga Pusat dibandingkan dengan solusi eksak dari Persamaan (1). Tingkat akurasi kedua metode dihitung menggunakan galat absolut yang diberikan pada Persamaan (10),

$$E_i = |y(x_i) - y_i|, \quad (10)$$

dengan $y(x_i)$ merupakan solusi eksak dan y_i merupakan solusi numerik pada titik x_i . Nilai galat pada Persamaan (10) dihitung untuk setiap titik diskret dan setiap variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Selanjutnya, hasil yang diperoleh disajikan dalam bentuk tabel dan grafik untuk membandingkan tingkat akurasi kedua metode serta menganalisis pengaruh ukuran langkah terhadap solusi numerik (Suryanto, Musafir, dkk., 2025).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini disajikan hasil penyelesaian masalah kondisi batas menggunakan metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat. Sebelum dilakukan penyelesaian secara numerik, terlebih dahulu ditentukan solusi eksak dari masalah kondisi batas sebagai pembanding untuk mengevaluasi tingkat akurasi kedua metode. Selanjutnya dilakukan implementasi metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat menggunakan beberapa variasi ukuran langkah. Hasil yang diperoleh disajikan dalam bentuk tabel, grafik solusi numerik, dan grafik galat (*error*) sehingga dapat dianalisis pengaruh ukuran langkah terhadap tingkat akurasi masing-masing metode.

Masalah Kondisi Batas (MKB)

Pada penelitian ini digunakan masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua sebagai berikut.

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = -\frac{1}{t}, 2 \leq t \leq 3, \quad (11)$$

dengan kondisi batas

$$y(2) = 0, y(3) = 0. \quad (12)$$

Masalah kondisi batas pada Persamaan (11) dipilih karena memiliki solusi eksak sehingga dapat digunakan sebagai acuan dalam mengevaluasi hasil penyelesaian numerik. Solusi eksak dari masalah kondisi batas tersebut diperoleh secara analitik. Selanjutnya solusi eksak tersebut digunakan sebagai pembanding terhadap hasil yang diperoleh menggunakan metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat.

Penentuan Solusi Eksak

Sebelum dilakukan penyelesaian secara numerik, terlebih dahulu ditentukan solusi eksak dari Persamaan (11). Solusi homogen diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$y'' - \frac{2}{t^2}y = 0. \quad (13)$$

Diasumsikan solusi berbentuk deret pangkat

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (14)$$

Dengan menurunkan Persamaan (14) dan mensubstitusikannya ke dalam Persamaan (13), diperoleh persamaan karakteristik

$$n(n-1) - 2 = 0. \quad (15)$$

Dari Persamaan (15) diperoleh akar $n = -1$ dan $n = 2$ sehingga solusi homogen menjadi

$$y_h = c_1 t^{-1} + c_2 t^2. \quad (16)$$

Selanjutnya diasumsikan solusi partikular berbentuk

$$y_p = At. \quad (17)$$

Substitusi Persamaan (17) ke Persamaan (11) menghasilkan $A = \frac{1}{2}$ sehingga solusi partikular adalah

$$y_p = \frac{1}{2}t. \quad (18)$$

Berdasarkan Persamaan (16) dan Persamaan (18), diperoleh solusi umum

$$y = c_1 t^{-1} + c_2 t^2 + \frac{1}{2} t. \tag{19}$$

Konstanta c_1 dan c_2 ditentukan menggunakan syarat batas pada Persamaan (12). Hasil perhitungan memberikan

$$c_1 = -\frac{18}{19}, \tag{20}$$

dan

$$c_2 = -\frac{5}{38}. \tag{21}$$

Dengan mensubstitusikan Persamaan (20) dan Persamaan (21) ke Persamaan (19), diperoleh solusi eksak

$$y(t) = \frac{19t - 5t^2 - \frac{36}{t}}{38}. \tag{22}$$

Solusi eksak pada Persamaan (22) selanjutnya digunakan sebagai pembanding untuk mengevaluasi hasil penyelesaian numerik.

Penyelesaian Menggunakan Metode Shooting

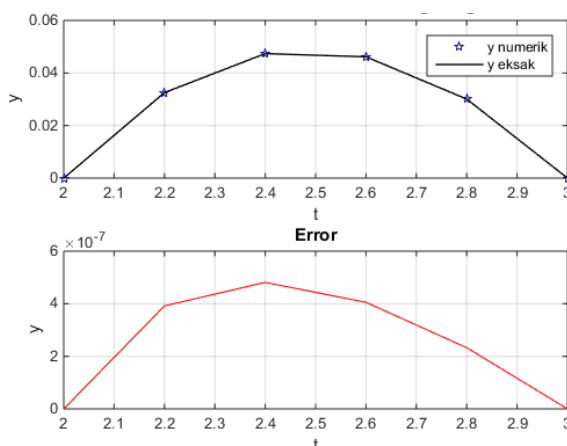
Pada bagian ini disajikan hasil penyelesaian masalah kondisi batas menggunakan metode *Shooting*. Implementasi metode dilakukan dengan mengubah masalah kondisi batas menjadi masalah nilai awal, kemudian sistem persamaan diferensial orde dua diubah menjadi sistem persamaan diferensial orde satu dan diselesaikan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Selanjutnya, solusi numerik dibandingkan dengan solusi eksak untuk mengetahui tingkat akurasi metode. Perbandingan tersebut disajikan dalam bentuk tabel, grafik solusi, dan grafik *error*. Dengan menggunakan ukuran langkah $h = 0,2$, diperoleh hasil penyelesaian seperti pada Tabel 1. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,2$.

Tabel 1. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,2$

i	t	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Error Absout
1	2.0	0	0	0
2	2.2	0.0325354934	0.0325358852	0.0000003918
3	2.4	0.0473679397	0.0473684211	0.0000004813
4	2.6	0.0461534408	0.0461538462	0.0000004054
5	2.8	0.0300749552	0.0300751880	0.0000002328
6	3.0	0	0	0

Berdasarkan Tabel 1. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,2$, terlihat bahwa nilai solusi numerik yang dihasilkan metode *Shooting* sangat mendekati solusi eksak pada setiap titik diskret. Perbedaan terbesar hanya terjadi pada orde 10^{-7} sehingga dapat dikatakan bahwa metode *Shooting* mampu memberikan aproksimasi yang sangat baik meskipun menggunakan ukuran langkah yang relatif besar, yaitu $h = 0,2$.

Selanjutnya, hasil perbandingan antara solusi numerik dan solusi eksak ditampilkan pada Gambar 1. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode *Shooting* dengan $h = 0,2$.



Gambar 1. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode *Shooting* dengan $h = 0,2$

Berdasarkan Gambar 1. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode *Shooting* dengan $h = 0,2$ terlihat bahwa kurva solusi numerik hampir berimpit dengan kurva solusi eksak. Hal ini menunjukkan bahwa metode *Shooting* mampu mengikuti bentuk solusi eksak dengan sangat baik pada seluruh interval penyelesaian, yaitu $2 \leq t \leq 3$. Hampir tidak terlihat adanya perbedaan visual antara kedua kurva karena galat yang dihasilkan sangat kecil. Grafik *error* pada bagian bawah Gambar 1. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode *Shooting* dengan $h = 0,2$ menunjukkan bahwa galat absolut bernilai nol pada kedua titik batas, yaitu $t = 2$ dan $t = 3$. Kondisi tersebut sesuai dengan karakteristik masalah kondisi batas Dirichlet. Di antara

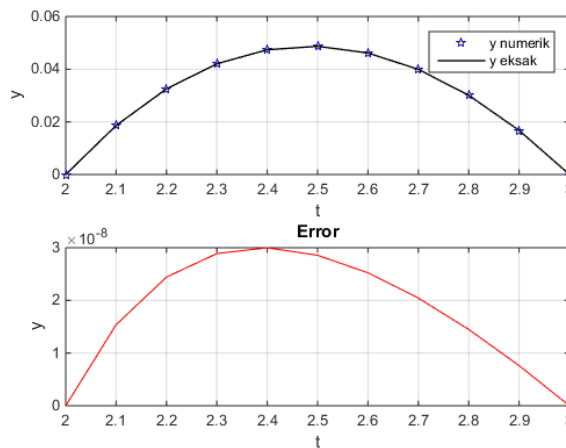
kedua titik batas tersebut, nilai *error* mengalami peningkatan secara bertahap hingga mencapai nilai maksimum sekitar $4,8 \times 10^{-7}$ pada $t = 2,4$, kemudian menurun kembali hingga bernilai nol pada titik akhir. Besarnya *error* yang hanya berada pada orde 10^{-7} menunjukkan bahwa metode *Shooting* memiliki tingkat akurasi yang sangat tinggi untuk menyelesaikan masalah kondisi batas yang digunakan pada penelitian ini. Hasil tersebut juga menunjukkan bahwa penggunaan metode Runge-Kutta orde empat sebagai penyelesaian masalah nilai awal memberikan kontribusi terhadap kecilnya galat yang dihasilkan. Dengan demikian, metode *Shooting* mampu menghasilkan solusi numerik yang hampir identik dengan solusi eksak meskipun menggunakan ukuran langkah $h = 0,2$.

Dengan memperkecil ukuran langkah menjadi $h = 0,1$, diperoleh hasil penyelesaian seperti pada Tabel 2. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,1$. Berdasarkan Tabel 2. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,1$ terlihat bahwa solusi numerik yang dihasilkan semakin mendekati solusi eksak dibandingkan ketika menggunakan ukuran langkah $h = 0,2$. Nilai *error* terbesar hanya sekitar $3,0 \times 10^{-8}$, atau sekitar satu orde lebih kecil dibandingkan hasil sebelumnya yang masih berada pada orde 10^{-7} . Hal ini menunjukkan bahwa pengurangan ukuran langkah meningkatkan ketelitian aproksimasi yang diperoleh metode *Shooting*.

Tabel 2. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,1$

<i>i</i>	<i>t</i>	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Error Absout
1	2.0	0	0	0
2	2.2	0.0325358607	0.0325358852	0.0000000244
3	2.4	0.0473683911	0.0473684211	0.0000000300
4	2.6	0.0461538209	0.0461538462	0.0000000252
5	2.8	0.0300751735	0.0300751880	0.0000000145
6	3.0	0	0	0

Selanjutnya hasil solusi numerik, solusi eksak, dan *error* ditampilkan pada Gambar 2. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan *error* metode *Shooting* dengan $h = 0,1$. Grafik pada Gambar 2. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan *error* metode *Shooting* dengan $h = 0,1$ memperlihatkan bahwa kurva solusi numerik dan solusi eksak hampir tidak dapat dibedakan secara visual. Grafik *error* juga menunjukkan pola yang sama seperti pada $h = 0,2$, yaitu bernilai nol pada kedua titik batas, meningkat hingga mencapai nilai maksimum di sekitar bagian tengah interval, kemudian kembali menurun hingga nol pada titik akhir. Akan tetapi, amplitudo *error* jauh lebih kecil sehingga hasil numerik menjadi semakin akurat.

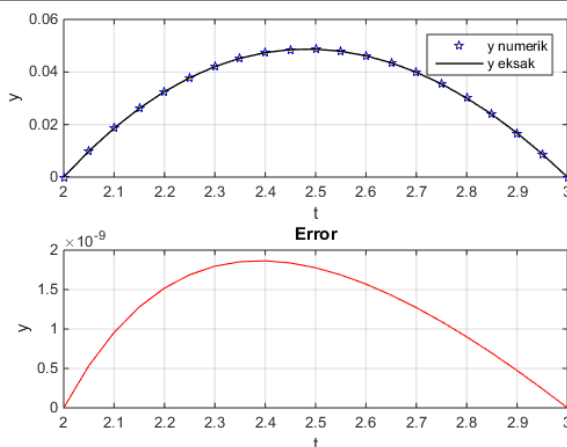


Gambar 2. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan *error* metode *Shooting* dengan $h = 0,1$

Dengan menggunakan ukuran langkah yang lebih kecil, yaitu $h = 0,05$, diperoleh hasil penyelesaian seperti pada Tabel 3. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,05$. Berdasarkan Tabel 3. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,05$ terlihat bahwa solusi numerik hampir sama dengan solusi eksak pada seluruh titik diskret. Nilai *error* yang diperoleh berada pada orde 10^{-9} , sehingga menunjukkan peningkatan akurasi yang sangat signifikan dibandingkan penggunaan ukuran langkah $h = 0,2$ maupun $h = 0,1$.

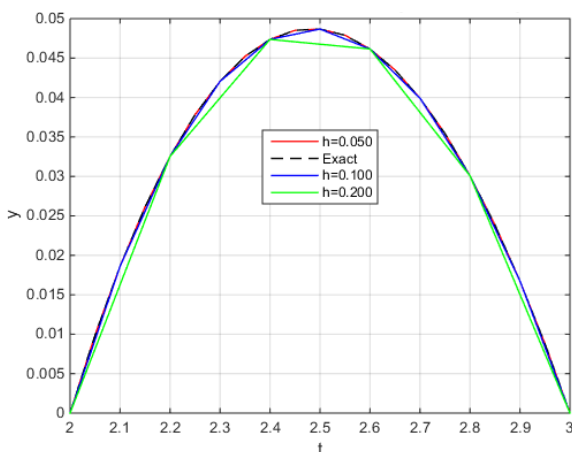
Tabel 3. Solusi Numerik Metode *Shooting* dengan $h = 0,05$

<i>i</i>	<i>t</i>	Solusi Numerik	Solusi Eksak	Error Absout
1	2.0	0	0	0
2	2.2	0.0325358836	0.0325358852	0.0000000015
3	2.4	0.0473684192	0.0473684211	0.0000000019
4	2.6	0.0461538446	0.0461538462	0.0000000016
5	2.8	0.0300751871	0.0300751880	0.0000000009
6	3.0	0	0	0



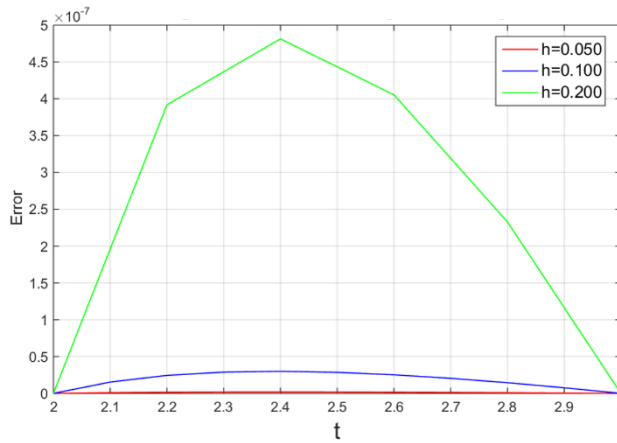
Gambar 3. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode Shooting dengan $h = 0,05$

Pada Gambar 3. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode Shooting dengan $h = 0,05$ terlihat bahwa kurva solusi numerik dan solusi eksak benar-benar berhimpit. Grafik *error* juga memiliki pola yang sama, namun dengan nilai yang jauh lebih kecil. Hasil ini menunjukkan bahwa semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, maka solusi numerik yang dihasilkan metode *Shooting* semakin mendekati solusi eksak.



Gambar 4. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode Shooting untuk $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$

Untuk melihat pengaruh ukuran langkah secara keseluruhan, solusi numerik yang diperoleh menggunakan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$ dibandingkan dengan solusi eksak seperti ditunjukkan pada Gambar 4. Plot solusi numerik, solusi eksak, dan error metode Shooting untuk $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$ terlihat bahwa seluruh solusi numerik mengikuti bentuk kurva solusi eksak. Akan tetapi, semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, semakin rapat kurva numerik terhadap kurva eksak. Kurva dengan $h = 0,2$ masih menunjukkan sedikit penyimpangan di sekitar titik puncak, sedangkan kurva dengan $h = 0,1$ sudah hampir berhimpit dengan solusi eksak. Kurva dengan $h = 0,05$ menyerupai solusi eksak. Secara keseluruhan dapat disimpulkan bahwa ukuran langkah berpengaruh terhadap tingkat akurasi metode *Shooting*. Semakin kecil nilai h , semakin kecil *error* yang dihasilkan dan semakin baik aproksimasi solusi numerik terhadap solusi eksak. Hasil ini konsisten dengan teori metode numerik bahwa pengurangan ukuran langkah mampu menurunkan galat diskritisasi dan meningkatkan ketelitian solusi.



Gambar 5. Plot error metode Shooting untuk $h = 0,20$, $h = 0,10$, dan $h = 0,05$.

Untuk memperjelas pengaruh ukuran langkah terhadap tingkat ketelitian metode Shooting, dilakukan perbandingan error yang dihasilkan untuk setiap nilai ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$, seperti ditunjukkan pada Gambar 5. Plot error metode Shooting untuk $h = 0,20$, $h = 0,10$, dan $h = 0,05$. Terlihat bahwa ketiga kurva memiliki pola yang sama, yaitu error bernilai nol pada titik batas, kemudian meningkat hingga mencapai nilai maksimum di sekitar bagian tengah interval, dan selanjutnya menurun kembali hingga nol pada titik batas akhir. Perbedaannya terletak pada besar error yang dihasilkan. Penggunaan $h = 0,2$ menghasilkan error terbesar, sedangkan penggunaan $h = 0,1$ mampu menurunkan error secara signifikan. Nilai error terkecil diperoleh pada $h = 0,05$ sehingga kurva error hampir berhimpit dengan sumbu horizontal. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, semakin kecil galat diskretisasi yang dihasilkan oleh metode Shooting. Dengan demikian, penggunaan ukuran langkah yang lebih kecil memberikan solusi numerik yang semakin mendekati solusi eksak sehingga akurasi metode Shooting menjadi lebih baik.

Penyelesaian Metode Bada Hingga

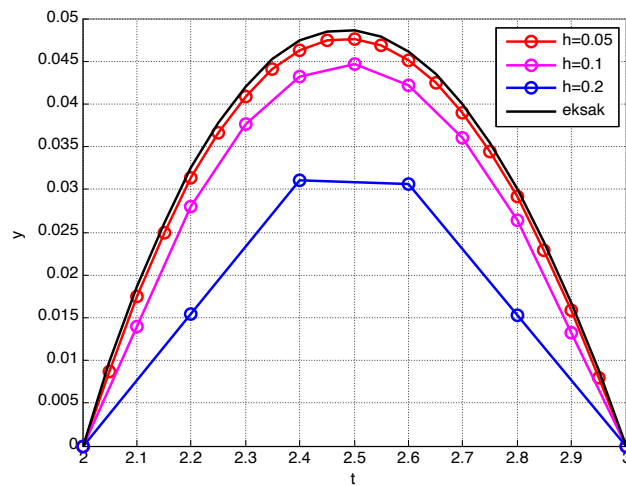
Pada bagian ini disajikan hasil penyelesaian masalah kondisi batas menggunakan metode Bada Hingga Pusat dengan tiga variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan solusi eksak untuk mengetahui pengaruh ukuran langkah terhadap tingkat akurasi metode. Pembahasan dilakukan berdasarkan nilai solusi numerik, error absolut, serta grafik perbandingan solusi dan grafik error.

Tabel 4. Solusi Numerik dan Error Metode Bada Hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$

i	t	Solusi Numerik			Error Absout		
		$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$	$h = 0,2$	$h = 0,1$	$h = 0,05$
1	2.0	0	0	0	0	0	0
2	2.2	0.0153929116	0.0280515184	0.0313721004	0.0171429736	0.0044843668	0.0011637848
3	2.4	0.0310936813	0.0431444515	0.0462674909	0.0162747397	0.0042239696	0.0011009302
4	2.6	0.0306417296	0.0421930506	0.0451297421	0.0155121165	0.0039607956	0.0010241041
5	2.8	0.0152307421	0.0263772612	0.0291382291	0.0148444459	0.0036979268	0.0009369588
6	3.0	0	0		0	0	0

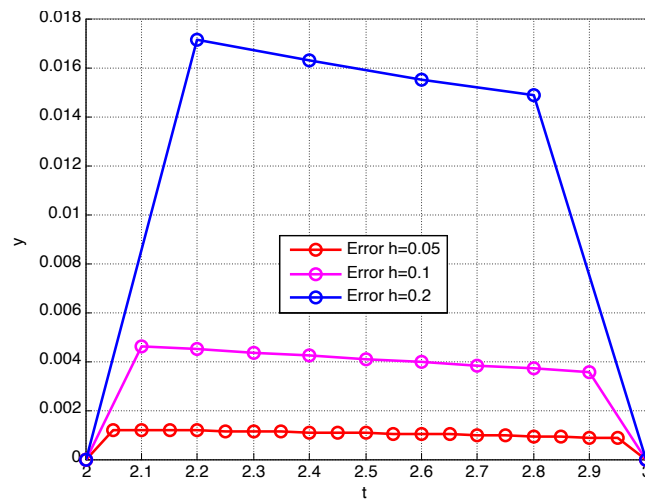
Berdasarkan Pada bagian ini disajikan hasil penyelesaian masalah kondisi batas menggunakan metode Bada Hingga Pusat dengan tiga variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Hasil yang diperoleh dibandingkan dengan solusi eksak untuk mengetahui pengaruh ukuran langkah terhadap tingkat akurasi metode. Pembahasan dilakukan berdasarkan nilai solusi numerik, error absolut, serta grafik perbandingan solusi dan grafik error.

Tabel 4. Solusi Numerik dan Error Metode Bada Hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$, diperoleh solusi numerik metode Bada Hingga Pusat untuk tiga variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Terlihat bahwa semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, solusi numerik semakin mendekati solusi eksak. Hal ini ditunjukkan oleh semakin kecilnya nilai error absolut pada setiap titik diskret. Sebagai contoh, pada titik $t = 2,4$, nilai error berkurang dari 0,0162747397 untuk $h = 0,2$, menjadi 0,0042239696 untuk $h = 0,1$, dan turun kembali menjadi 0,0011009302 untuk $h = 0,05$. Hasil tersebut menunjukkan bahwa pengurangan ukuran langkah mampu meningkatkan ketelitian solusi numerik yang diperoleh.



Gambar 6. Plot solusi numerik dan eksak metode beda hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$

Gambar 6. Plot solusi numerik dan eksak metode beda hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$ memperlihatkan perbandingan solusi numerik metode Beda Hingga Pusat terhadap solusi eksak untuk ketiga ukuran langkah. Terlihat bahwa seluruh kurva numerik memiliki pola yang sama dengan solusi eksak, namun tingkat kedekatannya berbeda. Kurva dengan $h = 0,2$ masih menunjukkan penyimpangan yang cukup besar terhadap solusi eksak, terutama di sekitar titik maksimum solusi. Ketika ukuran langkah diperkecil menjadi $h = 0,1$, kurva numerik menjadi lebih mendekati solusi eksak. Selanjutnya, penggunaan $h = 0,05$ menghasilkan kurva yang paling berhimpit dengan solusi eksak sehingga memberikan aproksimasi yang paling baik di antara ketiga ukuran langkah yang digunakan.



Gambar 7. Plot solusi numerik dan eksak metode beda hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$

Perbandingan *error* untuk setiap ukuran langkah ditunjukkan pada Gambar 7. Plot solusi numerik dan eksak metode beda hingga dengan $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$. Terlihat bahwa pola *error* pada ketiga kurva relatif serupa, yaitu bernilai nol pada kedua titik batas dan mencapai nilai terbesar di sekitar bagian tengah interval. Namun demikian, besarnya *error* berbeda untuk setiap ukuran langkah. Kurva dengan $h = 0,2$ menghasilkan *error* paling besar, sedangkan kurva dengan $h = 0,1$ menunjukkan penurunan *error* yang cukup signifikan. Nilai *error* terkecil diperoleh ketika menggunakan $h = 0,05$ sehingga kurva *error* berada paling dekat dengan sumbu horizontal. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, semakin kecil galat diskretisasi yang dihasilkan oleh metode Beda Hingga Pusat.

Berdasarkan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa ukuran langkah memberikan pengaruh yang signifikan terhadap akurasi metode Beda Hingga Pusat. Penggunaan ukuran langkah yang lebih kecil menghasilkan solusi numerik yang semakin mendekati solusi eksak serta menurunkan nilai *error* pada setiap titik diskret. Walaupun demikian, jika dibandingkan dengan hasil metode *Shooting* pada ukuran langkah yang sama, metode Beda Hingga Pusat masih menghasilkan *error* yang lebih besar. Dengan demikian, pada masalah kondisi batas yang dikaji dalam penelitian ini, metode *Shooting* memberikan tingkat akurasi yang lebih baik dibandingkan metode Beda Hingga Pusat.

KESIMPULAN

Penelitian ini membandingkan kinerja metode *Shooting* dan metode Beda Hingga Pusat dalam menyelesaikan masalah kondisi batas persamaan diferensial linear orde dua dengan kondisi batas Dirichlet. Pengujian dilakukan menggunakan tiga variasi ukuran langkah, yaitu $h = 0,2$, $h = 0,1$, dan $h = 0,05$, kemudian hasil numerik dibandingkan dengan solusi eksak menggunakan galat absolut. Hasil penelitian menunjukkan bahwa kedua metode mampu menghasilkan solusi numerik yang

mengikuti pola solusi eksak. Namun, semakin kecil ukuran langkah yang digunakan, semakin kecil galat yang dihasilkan sehingga solusi numerik semakin mendekati solusi eksak. Pada kedua metode, penggunaan ukuran langkah $h = 0,05$ memberikan tingkat akurasi terbaik dibandingkan ukuran langkah $h = 0,1$ dan $h = 0,2$.

Berdasarkan hasil perbandingan, metode *Shooting* menghasilkan galat yang jauh lebih kecil dibandingkan metode Beda Hingga Pusat pada setiap ukuran langkah yang sama. Dengan demikian, untuk masalah kondisi batas yang dikaji pada penelitian ini, metode *Shooting* memberikan tingkat akurasi yang lebih tinggi dibandingkan metode Beda Hingga Pusat. Sementara itu, metode Beda Hingga Pusat tetap mampu menghasilkan solusi numerik yang baik, namun memerlukan ukuran langkah yang lebih kecil agar memperoleh tingkat ketelitian yang mendekati metode *Shooting*. Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan kajian ini dengan membandingkan kedua metode pada masalah kondisi batas nonlinear, persamaan diferensial *stiff*, atau menggunakan variasi kondisi batas lain seperti Neumann dan Robin. Selain itu, analisis efisiensi komputasi, waktu eksekusi, serta penggunaan ukuran galat lain, seperti *Root Mean Square Error* (RMSE), juga dapat dilakukan untuk memberikan evaluasi yang lebih komprehensif terhadap kinerja masing-masing metode.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah memberikan dukungan, bantuan, dan masukan selama proses penyusunan penelitian ini sehingga penelitian dapat diselesaikan dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- Almutairi, S. S. A., & Saeed, A. M. (2025). A Comparative Study of Finite Difference and Galerkin Finite Element Methods for Solving Boundary Value Problems. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 18(2), 1–10. <https://doi.org/10.29020/nybg.ejpm.v18i2.5895>
- Ardiana, D., Rachman, A. M., Nurkarimah, D., & Habibah, U. (2025). Comparison Study between Shooting and Finite Difference Methods for Solving Linear Boundary Value Problem with Dirichlet, Neumann, and Robin Boundary Conditions. *Indonesian Journal of Mathematics and Applications*, 3(1), 19–37. <https://doi.org/10.21776/ub.ijma.2025.003.01.2>
- Bakodah, H. O., Alzahrani, K. A., Alzaid, N. A., & Almazmumy, M. H. (2024). Efficient decomposition shooting method for tackling two-point boundary value models. *Journal of Umm Al-Qura University for Applied Sciences*, 11(2), 319–329. <https://doi.org/10.1007/s43994-024-00162-w>
- Ben-Romdhane, M., & Temimi, H. (2025). An Iterative Finite Difference Method for Solving Nonlinear Gordon-Type. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 292, 2084. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.023>
- Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis* (9 ed.). Brooks/Cole.
- Dung, N. D., & Quang, V. V. (2024). Finite Difference Method for Solving Second-Order Boundary Value Problems with High-Order Accuracy. *European Journal of Mathematical Analysis*, 4, 10. <https://doi.org/10.28924/ada/ma.4.10>
- Edun, I. F., & Akinlabi, G. O. (2021). Application of the shooting method for the solution of second order boundary value problems. *Journal of Physics: Conference Series*, 1734(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1734/1/012020>
- Jumri, N. J., & Md Shab, N. F. (2001). A nonlinear shooting method for two-point boundary value problems. *Computers and Mathematics with Applications*, 42(10–11), 1411–1420. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00250-4](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00250-4)
- Kamelia, S., Muallimah, A., Nurkamila, S., & Habibah, U. (2025). A Comparative Study of Finite Difference, Shooting, and Collocation Methods for Linear Non-Stiff, Stiff, and Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems with Dirichlet and Neumann Boundary Conditions. *Indonesian Journal of Mathematics and Applications*, 3(2), 105–133. <https://doi.org/10.21776/ub.ijma.2025.003.02.4>
- Lestari, S. P., Suryanto, A., & Darti, I. (2025). Stability and Bifurcation Analysis of a Discrete Fractional Order Predator-Prey Leslie-Gower Model With Fear Effect, Allee Effect, and Interspecies Rivalry. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 2025, 1–21. <https://doi.org/10.28919/cmbn/9147>
- Suryanto, A., Krisnawati, V. H., Lestari, S. P., Matatula, D. A., & Fahrurrozy, M. (2025). Bifurkasi pada Model Predator-Prey Diskret dengan Fungsi Respon Ratio-Dependent dan Pemanenan. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, 22(2), 19–32. <https://doi.org/10.12962/limits.v22i2.3450>
- Suryanto, A., Musafir, R. R., & Darti, I. (2025). *METODE NUMERIK UNTUK PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA dan Aplikasinya dengan Python*. <https://www.researchgate.net/publication/394671706>